

Curvatura in funzione di Sviluppo

Si definisce un sistema di funzioni del tipo $k=f(s)$.

dove k è la curvatura in un punto e s lo sviluppo della curva stessa, ovvero la distanza dall'origine.

l'origine viene assunta su un asse orizzontale, crescente verso destra, ovvero una retta di equazione $k=0$.

la curvatura avrà lo stesso segno dell'angolo in coordinate polari.

Una curvatura positiva sarà antioraria, una curvatura negativa sarà oraria.

In altre parole un cerchio di raggio R , tracciato in senso orario, avrà formula $k = -1/R$

un cerchio di raggio R , tracciato in senso antiorario, avrà formula $k = 1/R$

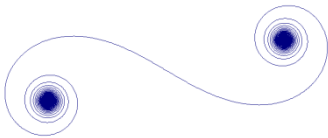
Questo sistema di coordinate presenta la caratteristica di esprimere, il verso di percorrenza della funzione e la funzione è differente se partiamo da un'origine finita (il punto 0) oppure da $-\infty$.

Esaminiamo le **equazioni di primo grado**.

Un'equazione del tipo $k = a+bs$

per $b=0$ abbiamo detto che sarà un cerchio di raggio $1/a$

analizzando la curva da $-\infty$ a $+\infty$ otteniamo una doppia spirale di questo tipo:

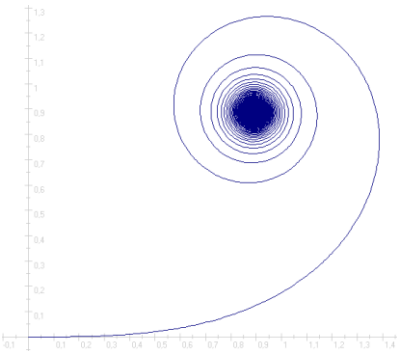


la prima spirale parte dal suo centro con curvatura infinita e procede verso l'esterno in senso orario fino al raggiungimento del punto 0 che è il cambio di curvatura fra le due spirali, quindi si avvolge in senso antiorario verso l'interno fino a raggiungere il centro della spirale con curvatura infinita.

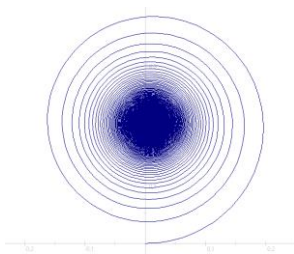
per $a=0$ ed $b= \pi/c^2$ La curva è nota come **Clotoide o spirale di Cornu**

Partendo da $-\infty$ non è possibile determinare un orientamento della curva rispetto all'asse origine, ed il parametro a , diventa influente perché non fa altro che spostare il punto di passaggio fra le due spirali verso l'una o verso l'altra, ma essendo queste infinite, non fa alcuna differenza. Lo stesso vale per il parametro b che non modifica né le curvature infinite dei centri delle spirali, né il punto di curvatura 0 al centro fra esse.

Le cose cambiano esaminando invece la curva a partire dall'origine, ovvero prendendo in esame l'intervallo di lunghezza $[0;+\infty]$

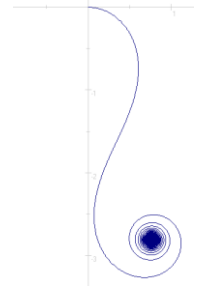


per $a=0$ e $b=1$ otteniamo una spirale di tipo a sinistra che ha formula $k=s$.

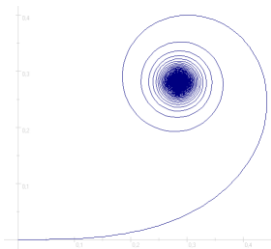


Il parametro a determina la curvatura iniziale della spirale.

La figura a sinistra ha formula $k = 5+s$, quella a destra un a negativo: $k = -2+s$



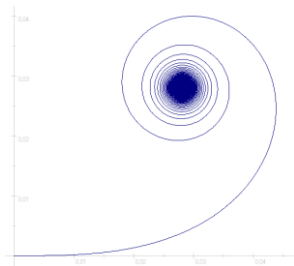
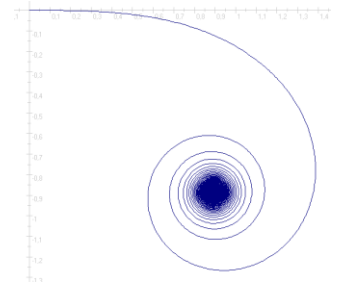
Il parametro b , determina la rapidità con cui la spirale si avvolge, produce pertanto una spirale la cui dimensione è inversamente proporzionale a b . Più grande è b più piccola è la spirale. Più piccolo è b (purché positivo) più grande la spirale.



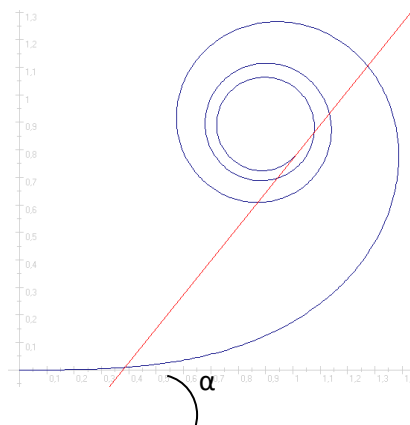
Qui a sinistra $k = 10 s$

Un b negativo poi determina una rotazione oraria come nella figura di destra $k = -s$, funzione simmetrica rispetto a $k = s$.

Risulta quindi che i grafici $k = a + bs$ sono simmetricamente speculari a $k = -(a + bs)$



Qui a fianco $k = 1000 s$. La spirale appare più piccola, mantenendo però medesime proporzioni. Cambia cioè solo la scala.



L'angolo α della retta tangente ad un punto della curva $k = f(s)$

è ricavabile dalla seguente formula:

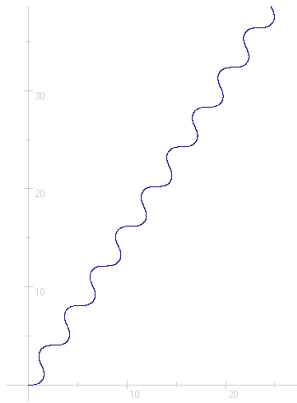
$$\alpha = \int_0^s f(s) ds = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

il grafico a sinistra è calcolato dalla formula $k = s$ e l'angolo α risulta essere quindi: $\alpha = \frac{1}{2} s^2$

Funzioni periodiche.

Studio della classe di curve definite dalla formula $k = a + \sin(s/b)$
dove K è la curvatura, s lo sviluppo della lunghezza della curva stessa,
 a e b coefficienti.

innanzitutto esaminiamo cosa succede quando $a=0$ e $b=1$.

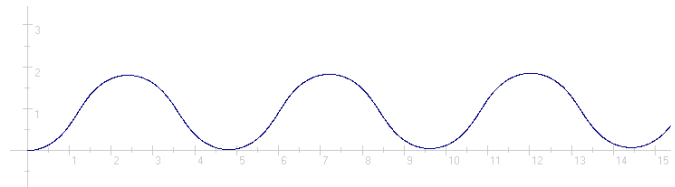


la nostra curvatura andrà ciclicamente da -1 ad 1.
La formula $k = \sin(s)$ produce il grafico qui a fianco.
La funzione risulta inclinata di circa $57^\circ,047$

mentre $k = \cos(s)$

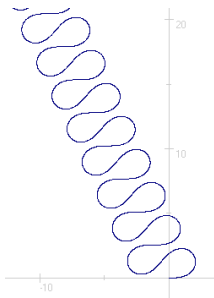
produce un grafico del tipo a fianco,
perfettamente orizzontale.

Il primo massimo si raggiunge quando $s = \pi$ e
corrisponde, in coordinate cartesiane, circa al
punto $x=2,405$ $y=1,798$.

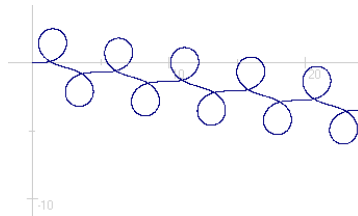


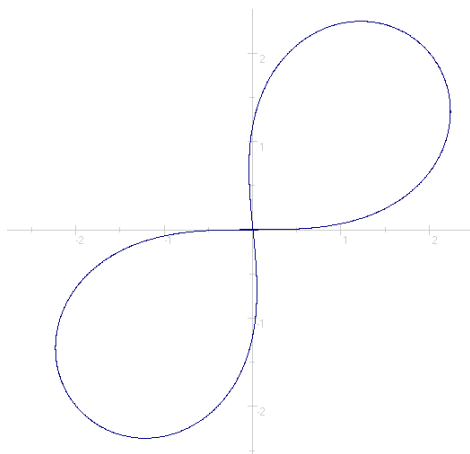
nella formula $k = \sin(s/b)$, il parametro b regola la durata di una curvatura, prima di invertire la direzione.
valori inferiori ad 1 fanno tendere la curva sempre più ad una retta, i valori superiori accentuano il zig-zag:

$b=2$



$b=3$





Il caso limite avviene quando $b = 2,40482557$ che produce una lemniscata che ritorna infinitamente su se stessa.

La lemniscata di equazione $k = \sin(s/b)$ ha un angolo al centro di $95,4835$ invece dei 90° esatti di Bernoulli ed ha una curvatura massima agli estremi di 1,

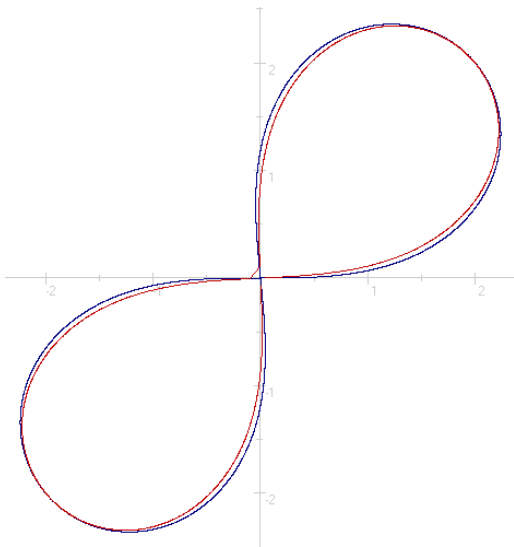
Tale lemniscata è leggermente più panciuta della lemniscata di Bernoulli come si vede dalle due figure sovrapposte nell'immagine seguente, dove è stata tracciata in blu la lemniscata

$$k = \sin\left(\frac{s}{2,40482557}\right)$$

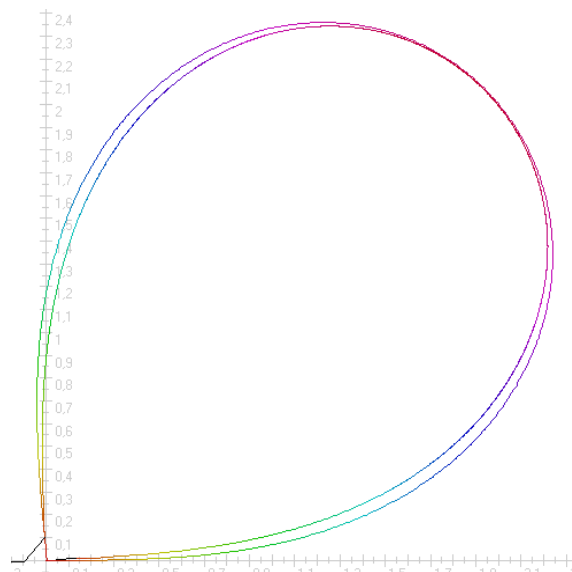
e in rosso quella di Bernoulli

$$\rho = 2\sqrt{2 \sin(2\theta - 0.0957022)}$$

tracciata in coordinate polari con il seno invece che il coseno ed un coefficiente tale da sovrapporla approssimativamente all'altra: è stata ruotata della metà di $5,4835$ (0.0957022 radianti) e disegnata con parametro $a = 2$ in modo da centrarla rispetto alla lemniscata blu.



Per vedere meglio questo ho fatto un altro disegno:



le mezze lemniscate nella figura a destra, sono paragonate con una gradazione di colore proporzionale alla curvatura (quella di Bernoulli è all'interno)

Equazione della lemniscata di Bernoulli in figura:

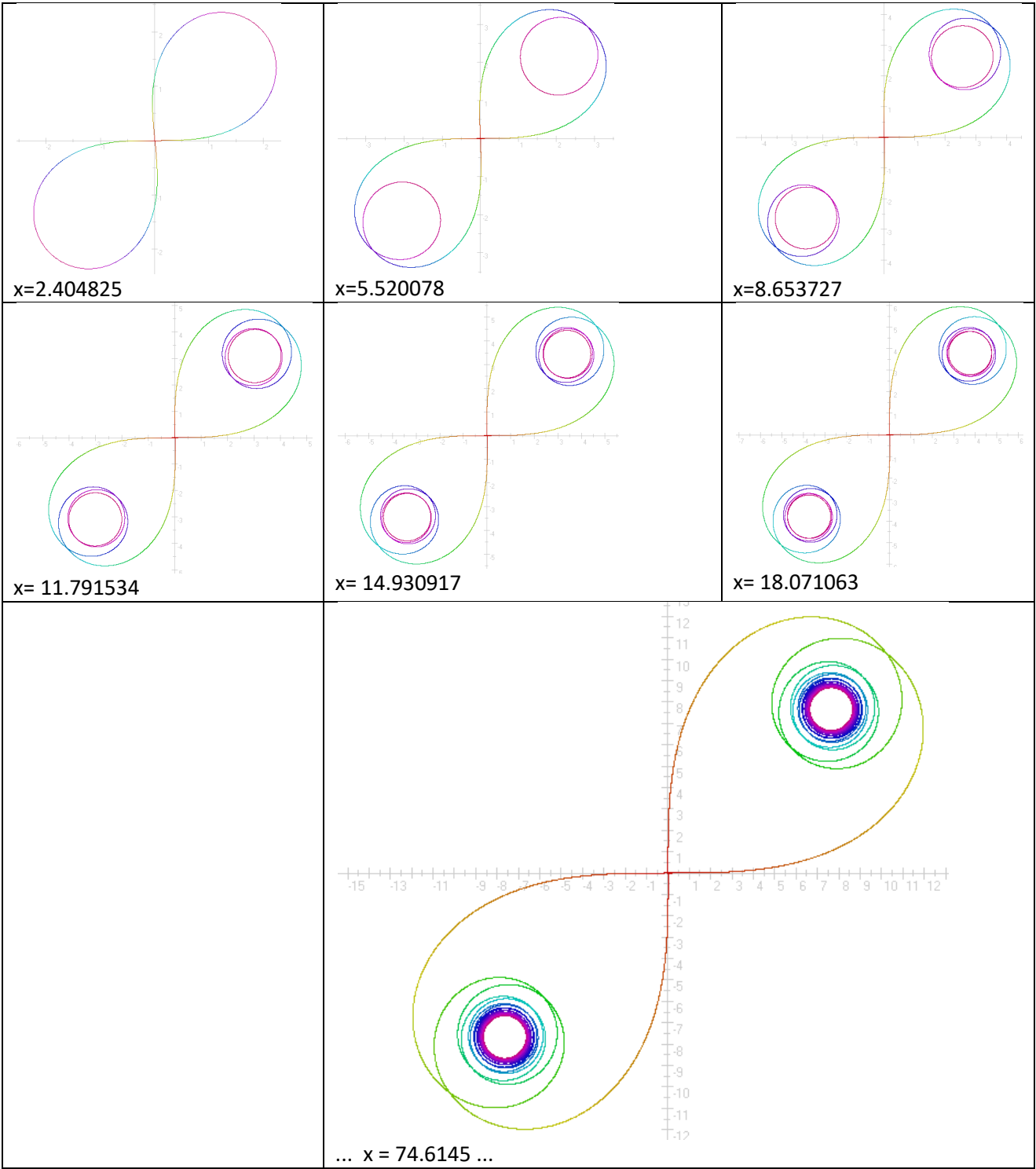
$$\rho = 2,0020\sqrt{2 \sin(2\theta - 0.0957022)}$$

La curvatura massima di Bernoulli è circa 1,0596 di poco superiore.

La costante 2.40482557 corrisponde alla prima radice della funzione di Bessel $J_0(x)$

Analogamente vediamo come si trasforma la lemniscata nella radici successive della funzione di Bessel:

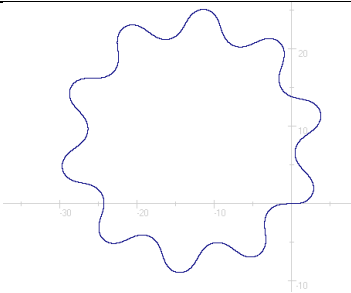
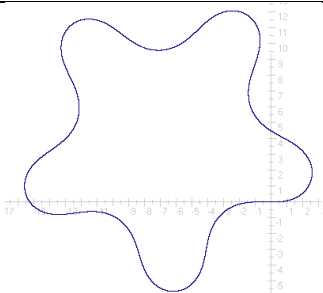
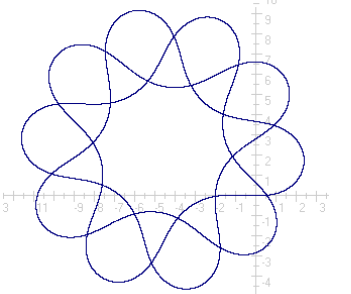
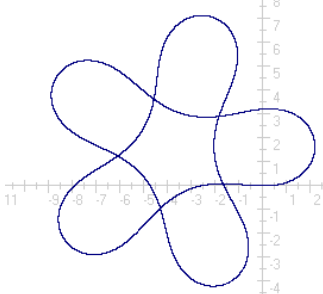
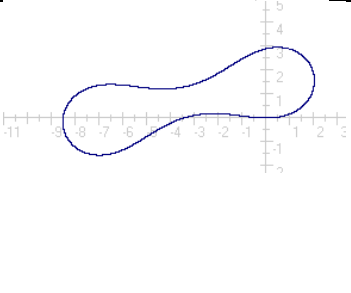
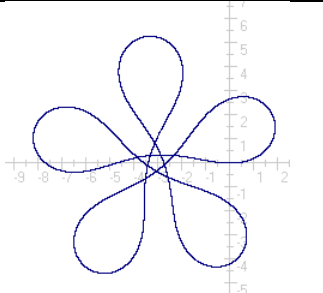
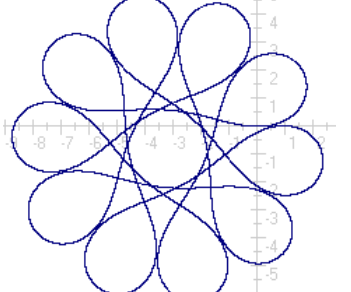
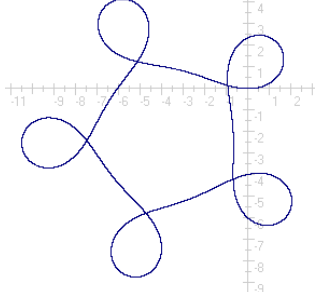
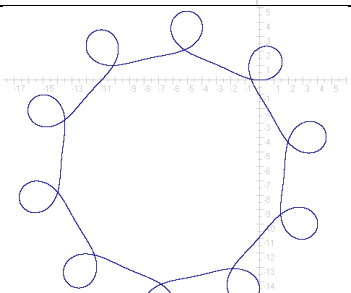
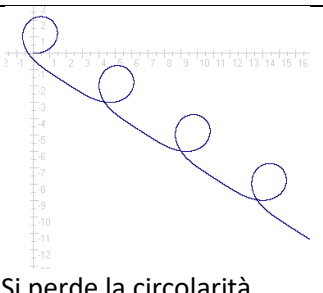
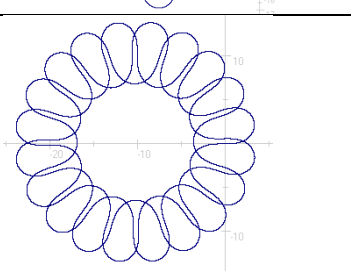
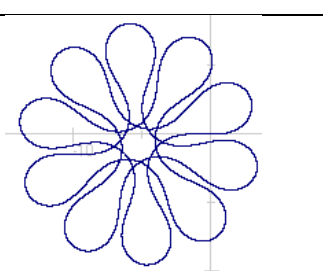
ovvero le varie x tali che $J_0(x)=0$

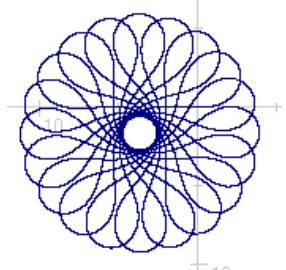
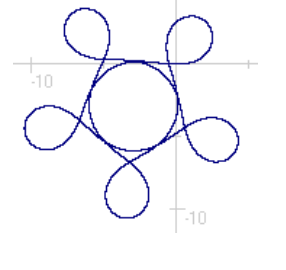
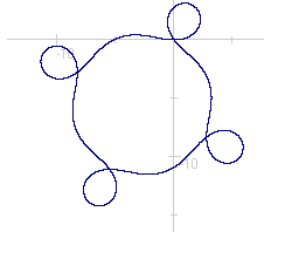
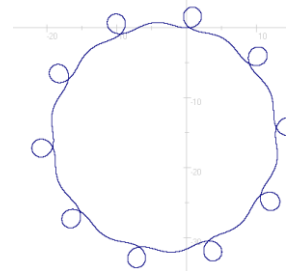
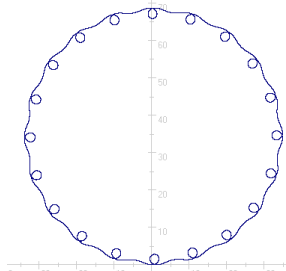
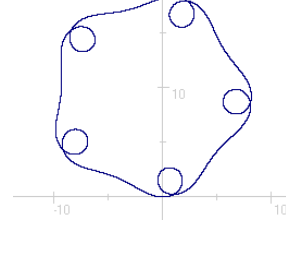
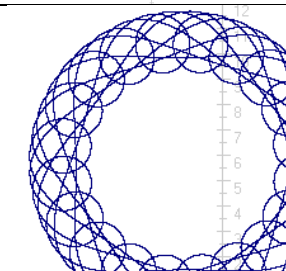
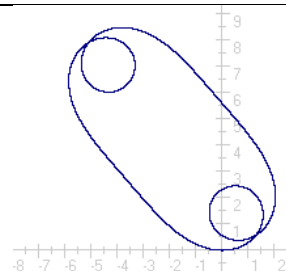


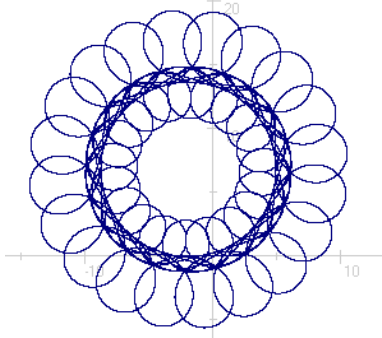
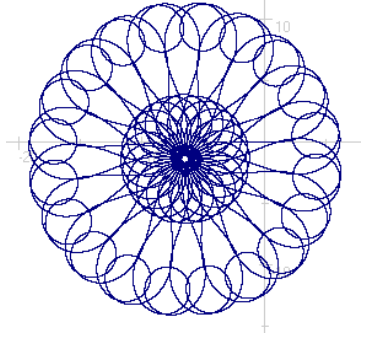
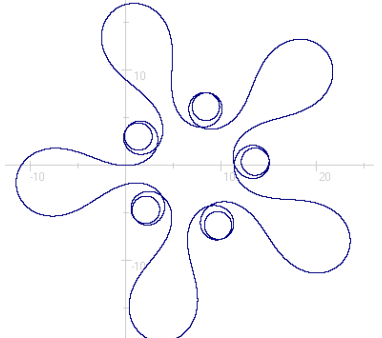
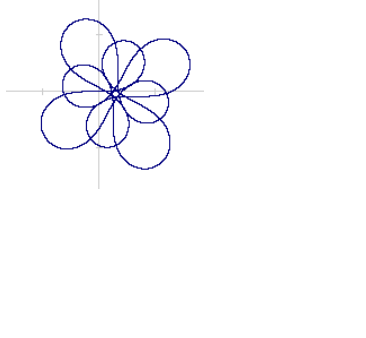
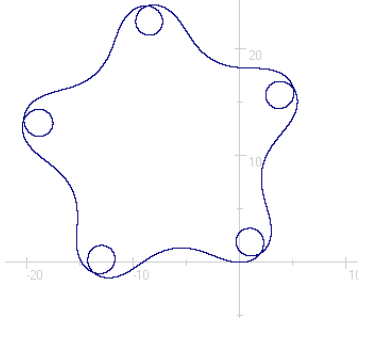
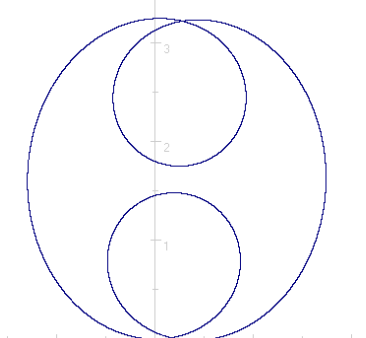
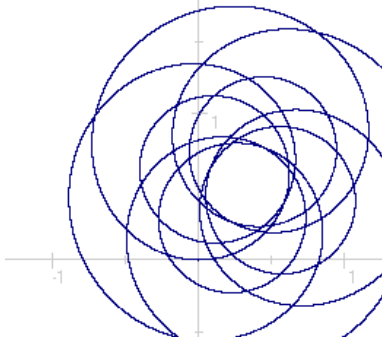
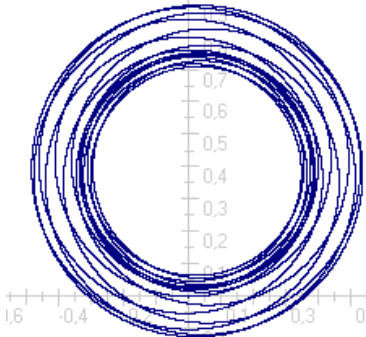
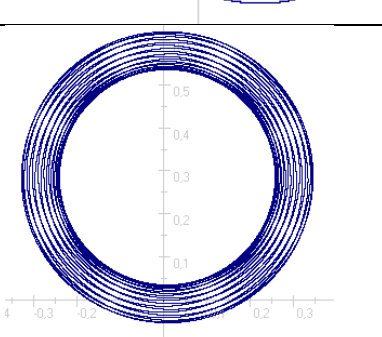
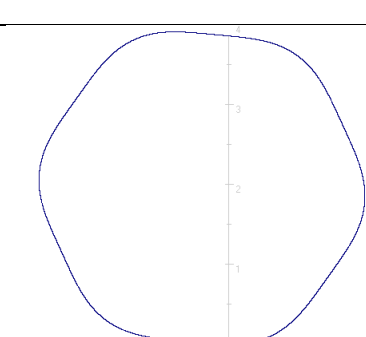
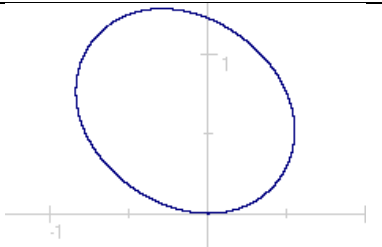
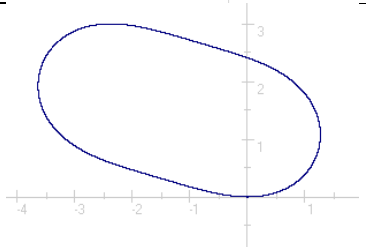
Il parametro a nella formula $y=a+\sin(s/b)$ comporta una rotazione della curva stessa.

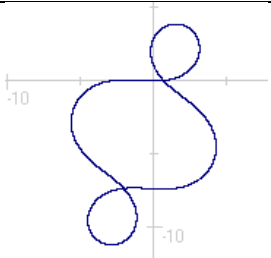
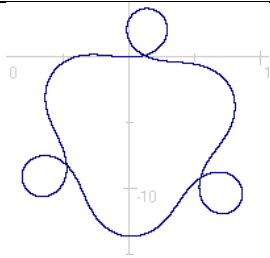
Per esempio: per $a = 0,1$ e $b=1$ otteniamo una figura che gira su se stessa

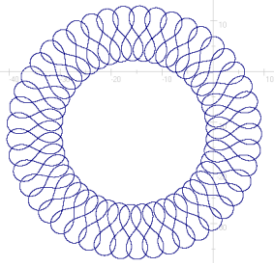
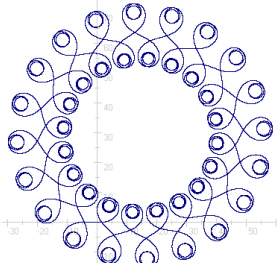
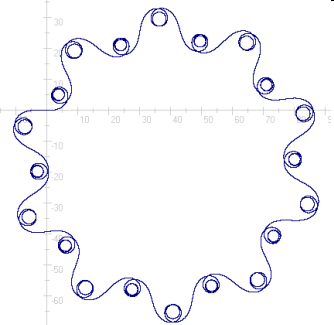
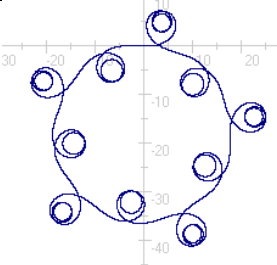
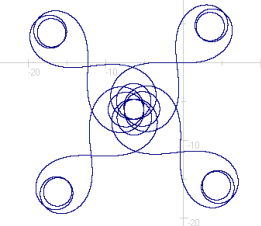
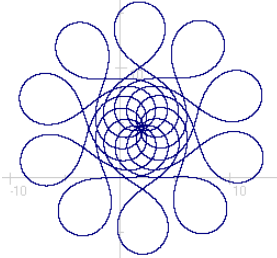
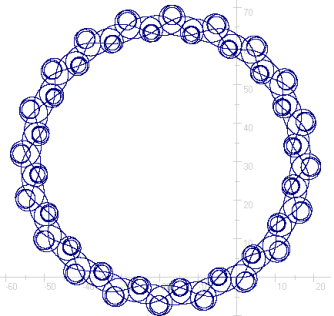
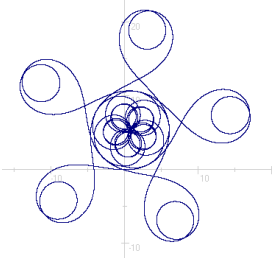
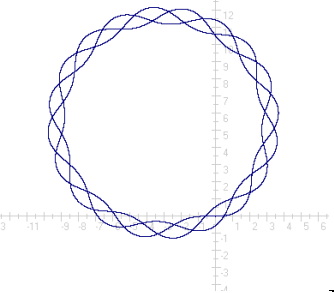
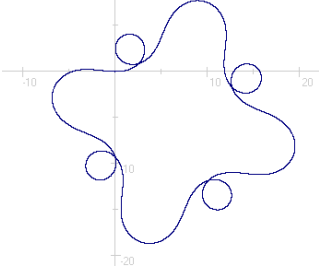
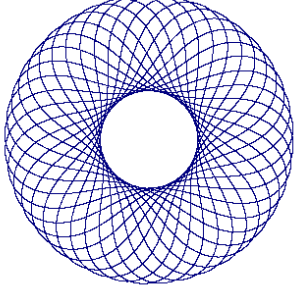
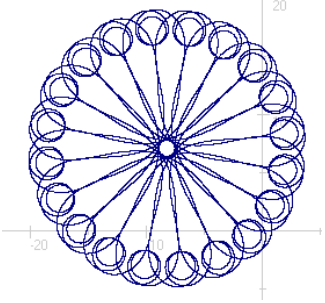
Esempi:

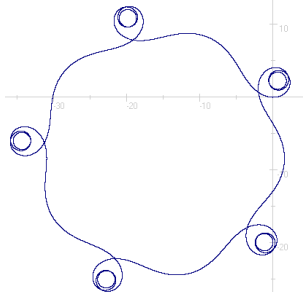
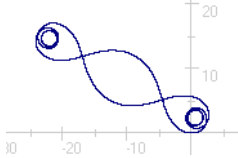
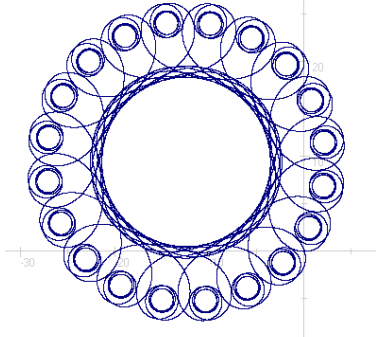
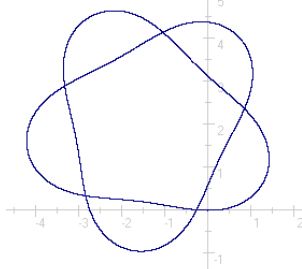
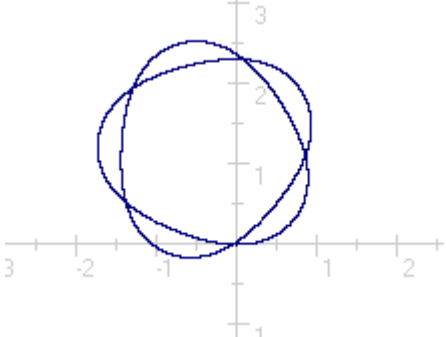
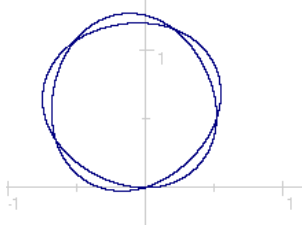
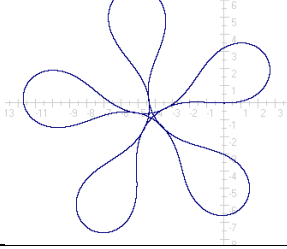
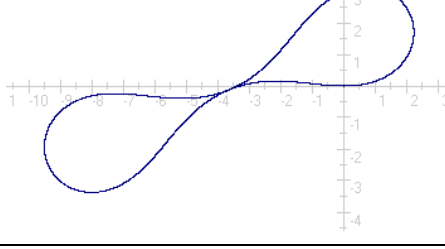
a	b		a	b	
0.1	1		0.2	1	
0.3	1		0.4	1	
0.5	1		0.6	1	
0.7	1		0.8	1	
0.9	1		1.0	1	 Si perde la circolarit�
0.1	1.5		0.2	1.5	

0.3	1.5		0.4	1.5	
0.5	1.5		0.6	1.5	
0.7	1.5		0.8	1.5	
0.9	1.5		1.0	1.5	

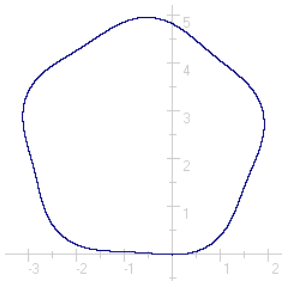
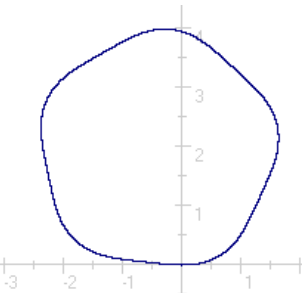
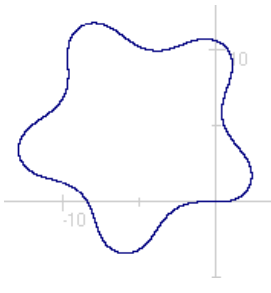
$a=0.1$ $b=3.5$		$a=0.1$ $b=4.5$	
$a=0.4$ $b=4.5$		$a=0.1$ $b=2.5$	
$a=.6$ $b=2$		$a=1.5$ $b=1$	
$a=1.5$ $b=1.5$		$a=1.5$ $b=2.5$	
$a=1.5$ $b=3.5$		$a=1$ $b=1/6$	
$a=3,$ $b=1/6$		$a=1$ $b=1/2$	 (al centro dei lati lunghi la curvatura

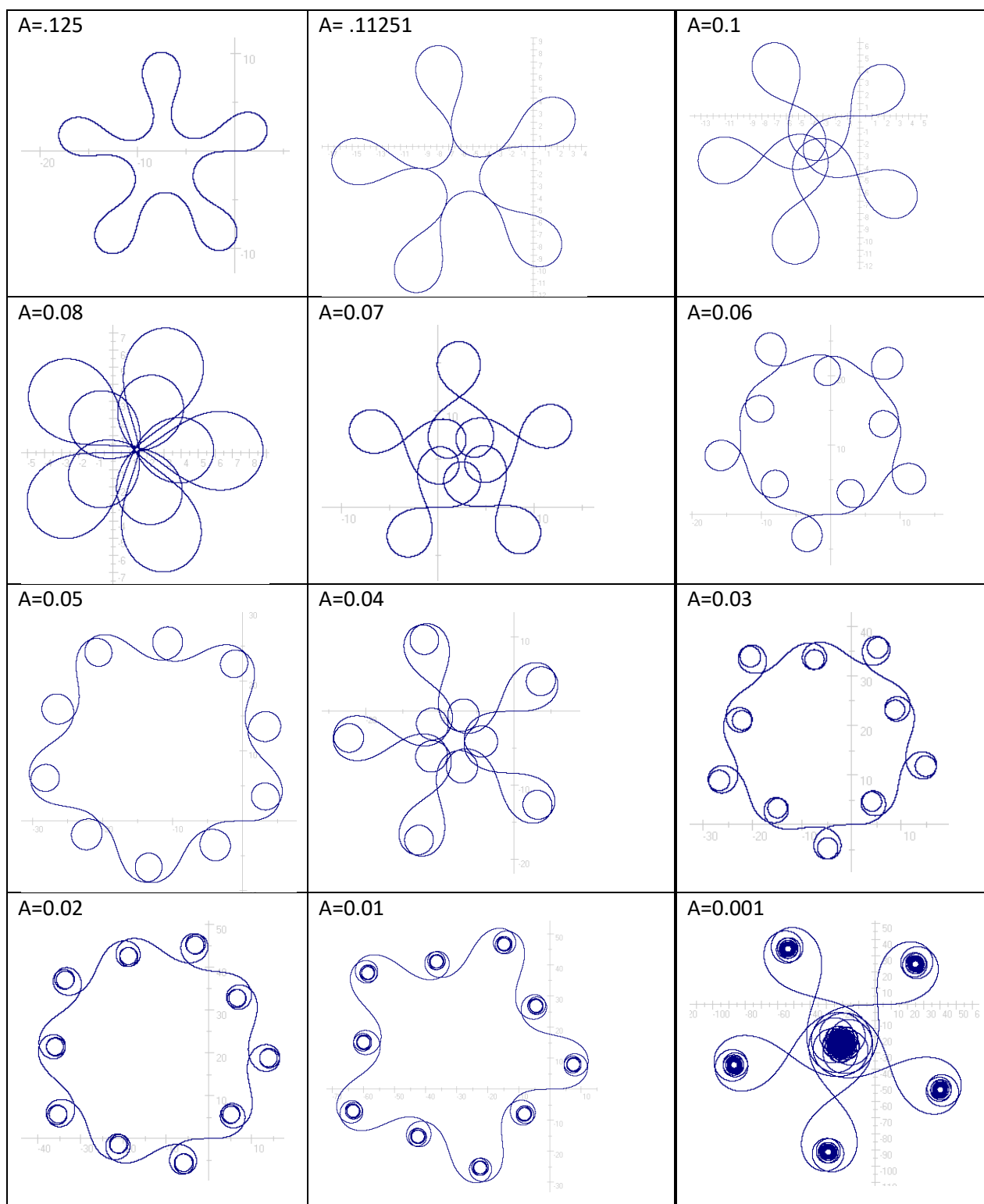
			è zero)
$a=0.25$ $b=2$		$a=1/3$ $b=2$	

$B=2/9$ $A=0.1$		$A=0.1$ $b=21/2$	
$A=0.1$ $B=19/2$		$A=0.1$ $b=8$	
$A=.1$ $b=15/2$		$A=.1$ $b=3$	
$A=.1$ $b=23/2$		$A=.2$ $b=8$	
0.3 0.5		0.3 2.5	
0.5 0.85		0.7 3.5	

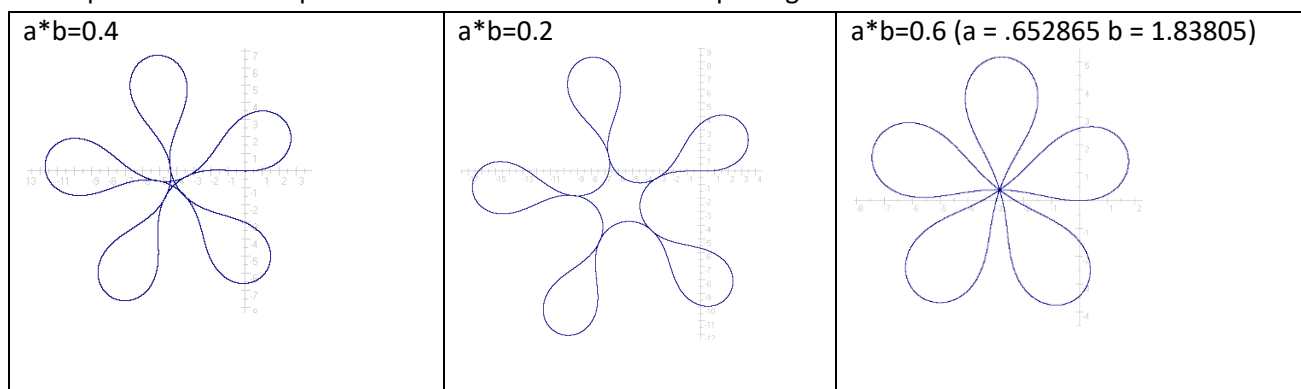
0.7 4		0.7 5	
0.7 13/2		0.8 1/2	
1.6 .25		3.2 .125	
2/7 1.4		A= 0.42696 B= 1.17106	

Si possono definire delle classi che hanno $a*b = \text{costante}$. per esempio: $a*b = 1/5$ $b = 0.2/a$

a=.8	A=.4	A=.25
		



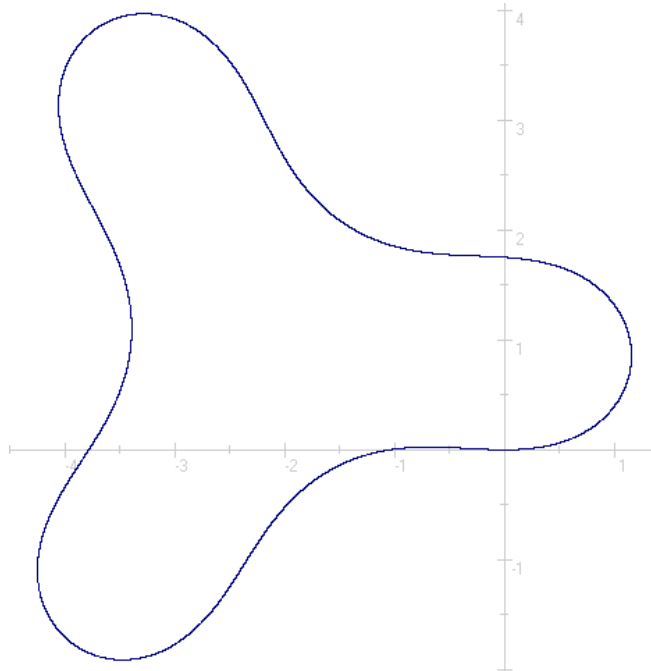
Esempi di classi simili. questa hanno come base una stella pentagonale.



definendo $a*b$ sotto forma di una frazione n/m abbiamo una figura con m lati.

per adesso possiamo indicare:

Linea: 1/1
 Coppia: 1/2,...
 Triangolo: 1/3...
 Quadrato: 1/4...
 Pentagono: 1/5,...
 Esagono: 1/6,...



$$1/3 * 5/4 = 5/12$$

Ettagono: 1/7...

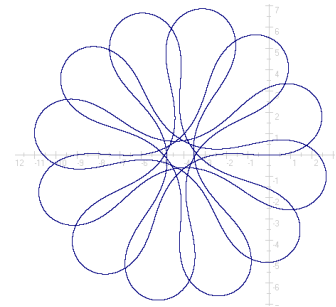
Lunghezza totale è, dal caso 2 in poi: $\frac{2\pi}{a}$

Vediamo questa: $a=1/3$ $b=1$ classe 1/3 (triangolo) la curvatura va da $-2/3$ a $4/3$
 i raggi dei cerchi quindi da $3/2$ orario a $3/4$ antiorario.

lunghezza sviluppo = 6π

l'incontro con l'asse y avviene al punto 1,75085 con una pendenza di -4° circa.

Se cambiamo b da 1 a 1.25 otteniamo un fiore con 12 petali.



Per allineare meglio le curve agli assi, può essere utile utilizzare $-\cos(s/b)$ invece che $+\sin(s/b)$

riepilogando, se fissiamo indichiamo con $C=2\pi R$ la circonferenza di un cerchio, si può ottenere una curva con N petali avente la stessa lunghezza della circonferenza C con la formula:

$$k = \frac{1}{R} - \cos\left(\frac{N \cdot s}{R}\right)$$

Lunghezza complessiva di una curva chiusa.

In formula del tipo $k=a-\cos(s/b)$

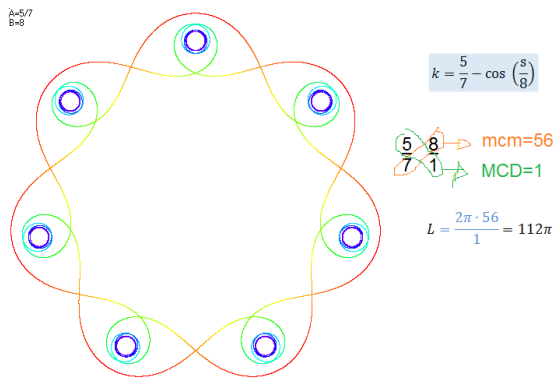
se il prodotto $a*b$ è un numero razionale, significa che il rapporto fra i due raggi di curvatura è razionale.

In quel caso la curva è chiusa se il denominatore di $a*b$ è diverso da 1.

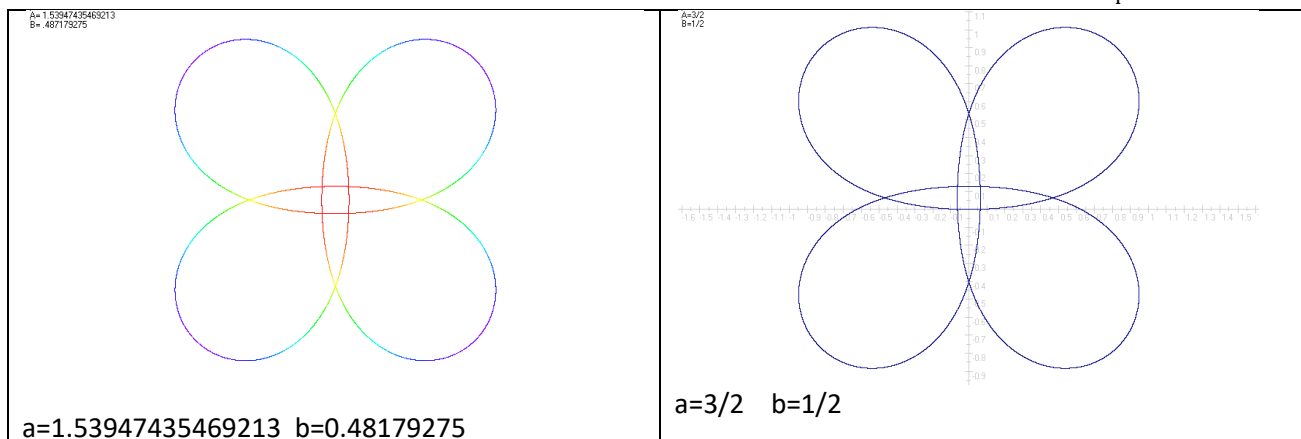
Esprimendo a sia a che b come frazioni di numeri interi: $a=a_1/a_2$ $b=b_1/b_2$ possiamo esprimere la lunghezza della curva come

$$L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{mcm(b_1, a_2)}{MCD(a_1, b_2)}$$

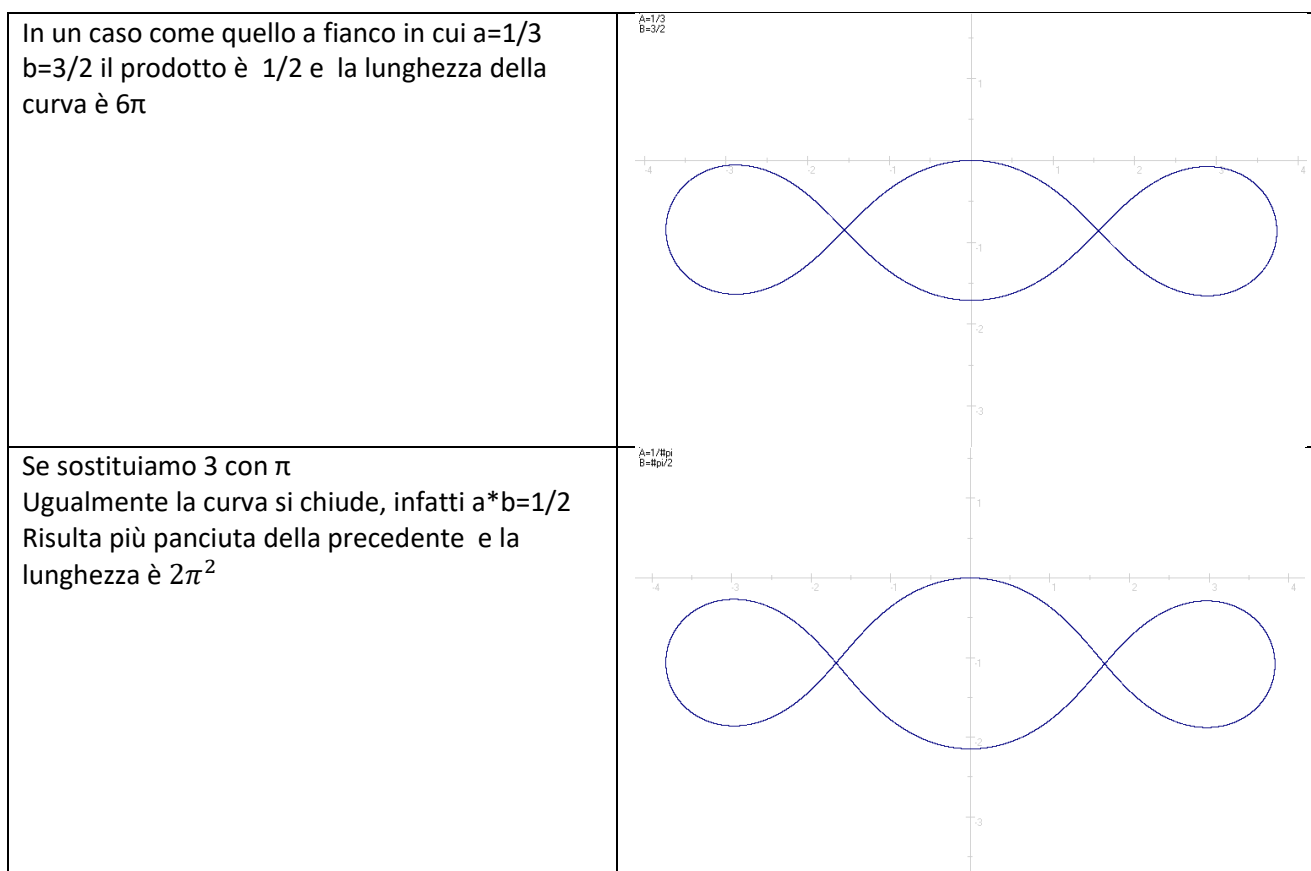
Esempio (con curvatura espressa anche come tonalità di colore):



I due disegni identici che seguono hanno uguale lunghezza (4π) e in entrambi i casi $a \cdot b = \frac{3}{4}$

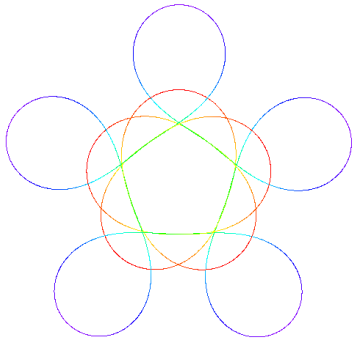


:



Quando a e b sono con molti decimali, conoscendo N si può calcolare la lunghezza come

A= 8.920674582677735E-02
B= 2.24198291448018
N=5
L=22.4198291448018pi



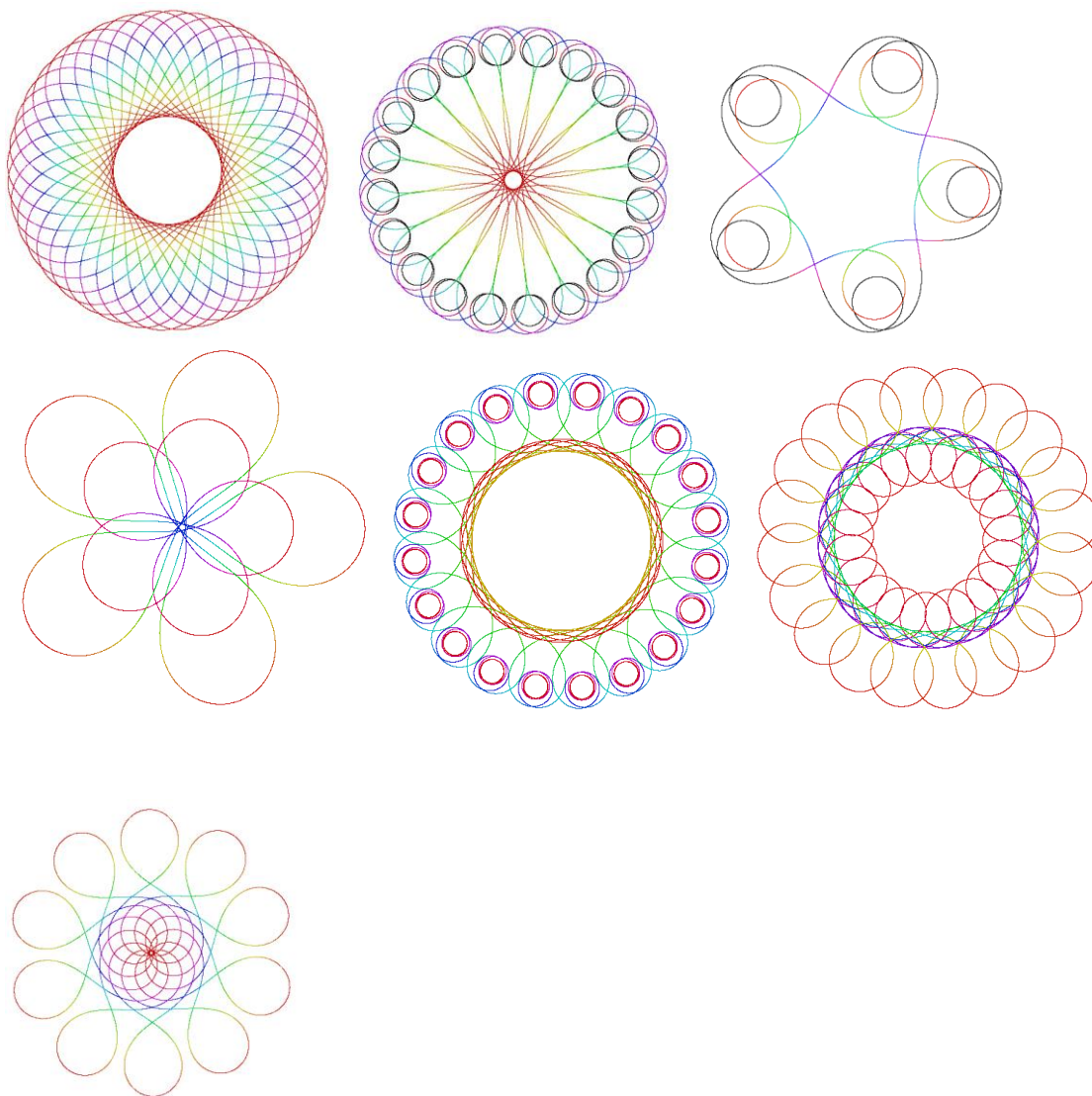
Esempio:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot b \cdot N$$

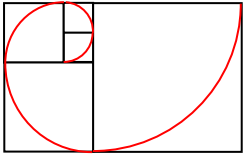
$$ab = \frac{M}{N} = \frac{2}{5}$$

$$L = 2 \cdot 5\pi b = 10 \pi b$$

Rappresentando la curva in una sfumatura di colore a seconda della curvatura otteniamo figure di questo tipo:



Le spirali



La spirale logaritmica approssimata con i numeri di Fibonacci appare come quarti di cerchio collegati fra loro e inseriti in quadrati aventi per lato i numeri di Fibonacci. Il rapporto fra un elemento ed il successivo tende a PHI.

Ciascun quadrato "i" preso in esame avrà per raggio $R_i = \frac{S_i}{2\pi}$

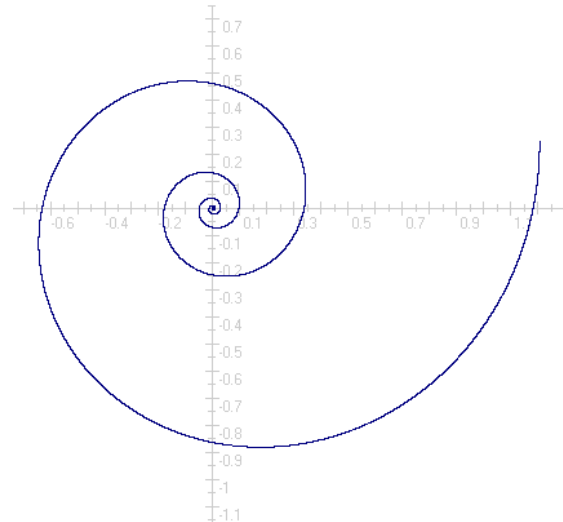
La curvatura del quarto di cerchio i-esimo sarà quindi $K_i = \frac{2\pi}{S_i}$.

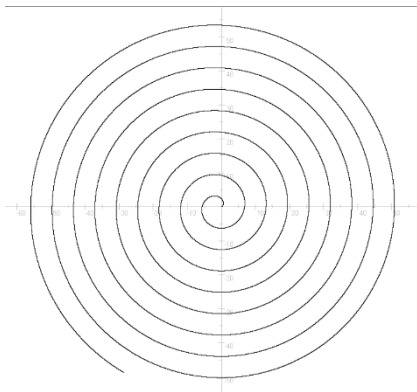
formula della spirale logaritmica

in coordinate polari: $\rho = e^{b\theta}$

in coordinate di sviluppo: $k = \frac{1}{bs}$

il diagramma della figura a fianco è quello della spirale logaritmica ottenuta con $b=0.2$





Una spirale simile a quella di Archimede si può invece ottenere con la formula:

$$k = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

La distanza fra le spire, misurata sul semiasse degli x positivi dopo la prima spira, pare tendere a 2π .

Ma questa NON E' la vera spirale di archimede.

Quindi la formula generica

$$k = \frac{a}{s^b}$$

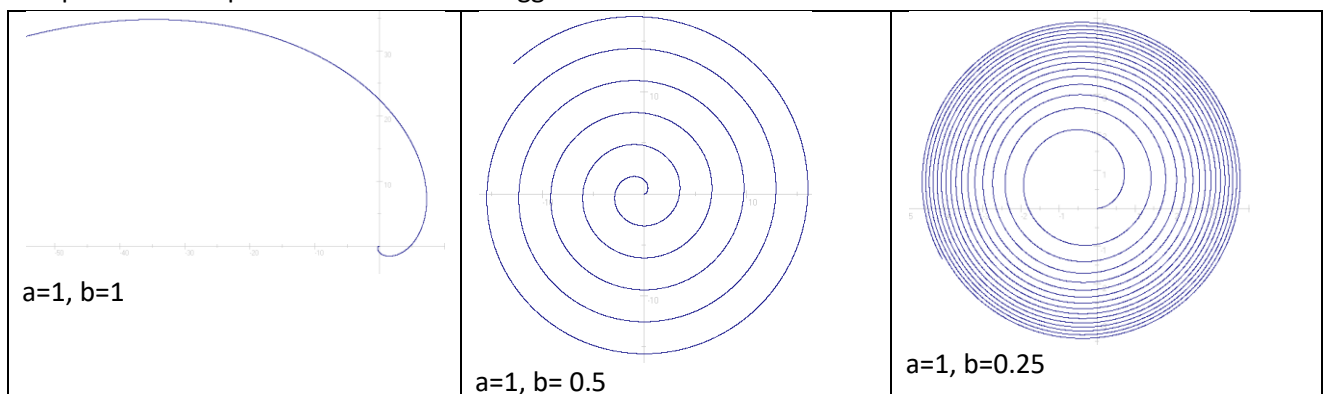
è in grado di produrre vari tipi di spirale.

il parametro a determina la dimensione della spirale ovvero la distanza fra le spire,

il parametro b determina il tipo di spirale: per b inferiore a 0.5 la distanza fra le spire diminuisce man mano che ci allontaniamo dal centro, per valori superiori la distanza fra le spire aumenta.

un b negativo si riconduce all'equazione di primo grado con primo coefficiente nullo (clotoide),

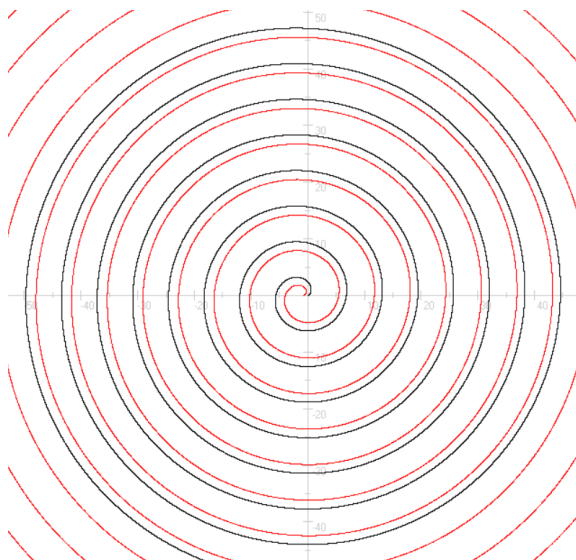
l'esponente zero produce un cerchio di raggio a .



quindi:

valore di b	Tipo di spirale
Negativo	Clotoide
Zero	Cerchio di raggio a
Inferiore a 0.5	Spirale a spire che si avvicinano
0.5	Converge in una spirale di Archimede
Superiore a 0.5	Spire divergenti
1	Simile alla spirale logaritmica di equazione $k = 1/(s + \sqrt{2})$
Infinito	Retta

Paragone spirale con spirale di Archimede:



nell'esempio qui a fianco in nero la spirale avente formula $k = \frac{1}{\sqrt{s}}$

In rosso la spirale di Archimede avente formula

$$\rho = \theta$$

(spostata verso sinistra di -0.8 sull'asse delle x per renderla parallela a quella blu)

Le due spirali sono parallele dopo il primo giro ma differiscono all'avvio.

Per ricavare la formula esatta della spirale di Archimede si potrebbe esprimere sviluppo e curvatura in funzione di θ in coordinate polari e cercare poi di sostituire θ .

In Coordinate Polari:

$$s = \int \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta$$

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

Prendendo la forma più semplice della spirale archimedeana: $\rho = \theta$ e risolvendo:

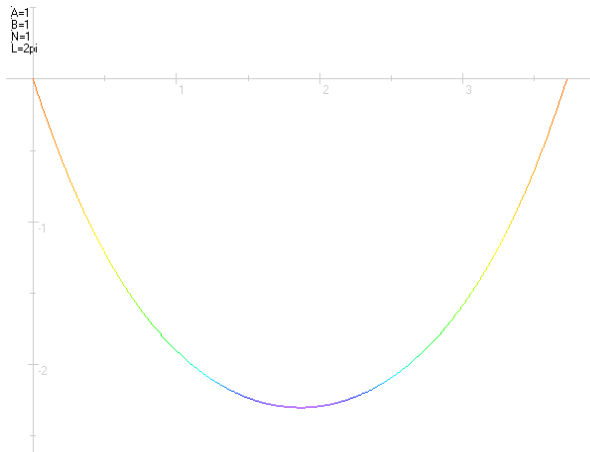
$$s = \frac{\log(\sqrt{\theta^2 + 1} + \theta)}{2} + \frac{\theta \sqrt{\theta^2 + 1}}{2}$$

$$k = \frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}$$

risulta però difficile esplicitare θ nella formula dello sviluppo.

LA CATENARIA

la catenaria avente equazione $y=\cosh(x)$ ha una formula particolarmente semplice:



$$k = \frac{1}{s^2 + 1}$$

l'esempio qui a fianco traccia una catenaria per S che va da $-\pi$ fino a π

per la formula completa che è

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

l'equazione diventa:

$$k = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Per avere una catenaria simmetrica per S che va da 0 a L, la formula diventa:

$$k = \frac{a}{\left(s - \frac{L}{2}\right)^2 + a^2}$$

L'angolo di partenza rispetto agli assi che permette di avere la catenaria orientata naturalmente è $-72^\circ.751228$

Ancora sulle funzioni periodiche con gli zeri delle funzioni J_n di Bessel:

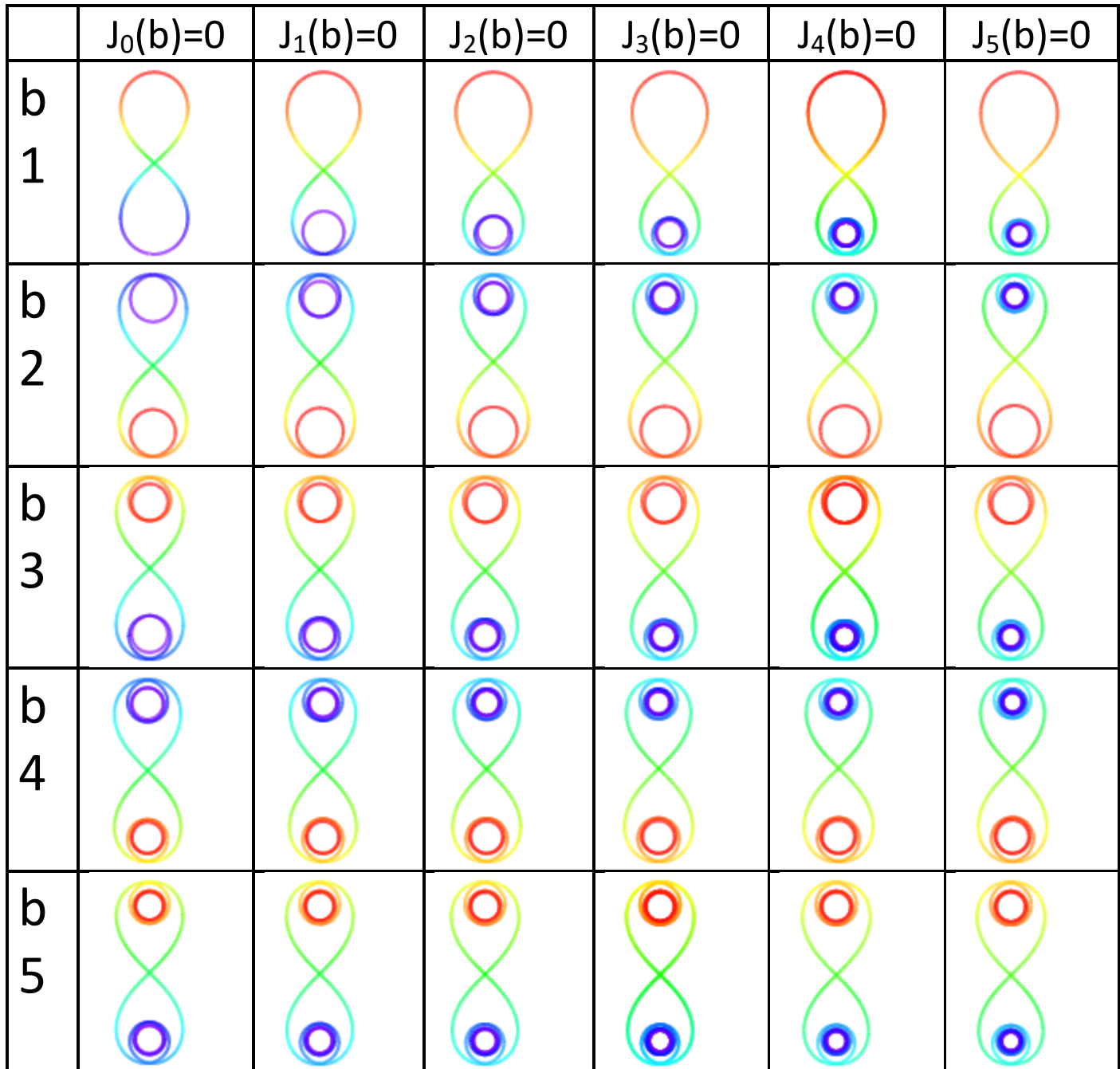
Abbiamo visto che la funzione $k=a-\cos(s/b)$ diviene una lemniscata verticale per $a=0$ e b tale che : $J_0(b)=0$.

Possiamo anche notare, colorando verso il rosso la curvatura oraria negativa e verso il violetto quella antioraria positiva, che b pari e b dispari producono lemniscate con curvature opposte.

Prendiamo la formula generica $k = n/b-\cos(s/b)$, per $n=0$ abbiamo le lemniscate del primo caso: una lemniscata simmetrica, dove il numero di volute dipende dalla b che azzerava la J_0 .

Ma anche le altre J_n di Bessel causano curve chiuse, tutta via asimmetriche.

Esempio:



Valori di b nella formula $k=n/b-\cos(s/b)$

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
b1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
b2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
b3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
b4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
b5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178